$a^2+b^2=1$ ……①

$c^2+d^2=1$ ……②

$ac+bd=a+c-1$ ……③

(1) ③ $\iff bd=-(ac-a-c+1)$

$=-(a-1)(c-1)$ …④

②の両辺に $b^2(\neq 0)$ をかけると.

$b^2c^2+b^2d^2=b^2 \iff b^2(c^2-1)+b^2d^2=0$

この式に④を代入すると

$b^2(c^2-1)+\{-(a-1)(c-1)\}^2=0$

$b^2(c+1)(c-1)+(a-1)^2(c-1)^2=0$ …⑤

ここで $c=1$ とすると ②により $d=0$ となり $d\neq 0$ に反する。よって. $c-1\neq 0$ である。そこで ⑤の両辺を $c-1$ で約せば

$b^2(c+1)+(a-1)^2(c-1)=0$

これに ①より $b^2=1-a^2$ を代入して.

$(1-a^2)(c+1)+(a-1)^2(c-1)=0$

$(1-a)(1+a)(c+1)+(a-1)^2(c-1)=0$ … ⑥

ここで $a=1$ とすると. ①より $b=0$ となり $b\neq 0$ に反する。よって. $a-1\neq 0$ である。

そこで ⑥の両辺を $a-1$ で割れば

$$-(1+a)(c+1)+(a-1)(c-1)=0$$

$$-ac-a-c-1+ac-a-c+1=0$$

$$-2(a+c)=0 \quad \therefore\ a+c=0 \quad \cdots(\text{答})$$

(2) (1)の結果より $c=-a$ であるから、②に代入して

$$a^2+d^2=1 \quad \cdots ⑦$$

となり、①−⑦を作れば

$$b^2-d^2=0$$

$$\Longleftrightarrow (b+d)(b-d)=0 \quad \cdots ⑧$$

ここで $b=d$ とすると ③により

$$a\cdot(-a)+b^2=0-1$$

よって $a^2-b^2=1 \quad \cdots ⑨$

①−⑨を作れば $2b^2=0 \quad \therefore\ b=0$

となり、$b\neq 0$ に反する。よって $b-d\neq 0$ である。

したがって ⑧より $b+d=0 \quad \cdots(\text{答})$

by K.N.