$\boxed{2}$ Xが m の倍数である確率を $P(m)$，Xが m，n の両方の倍数である確率を $P(m\cap n)$ などと書き表すものとする

(1) Xが4で割り切れない場合は

(i) 出た目がすべて奇数の場合 $\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ii) 2または6が1回だけ出て、他はすべて奇数である場合

$${}_nC_1\left(\frac{2}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(i)(ii)より余事象を考えて

$$P(4)=1-P(\overline{4})=1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=1-\frac{2n+3}{3\cdot 2^n}\quad\cdots(\text{答})$$

(ii) Xが8で割り切れない場合は

(i) 出た目がすべて奇数の場合 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ii) 2または6が1回だけ出て、他はすべて奇数である場合

(1)(ii)より $\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(iii) 2または6が2回だけ出て、他はすべて奇数である場合

$${}_nC_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{9\cdot 2^{n-1}}$$

(iv) 4が1回だけ出て、他はすべて奇数である場合

$${}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n}{3\cdot2^n}$$

(i)〜(iv)より余事象を考えて

$$P(8)=1-P(\overline{8})$$

$$=1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{9\cdot2^{n-1}}+\frac{n}{3\cdot2^n}\right\}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{9}+\frac{n}{6}\right\}$$

$$=1-\frac{2n^2+7n+9}{9\cdot2^n}\quad\cdots(答)$$

(3) 求める確率 $P(24)$ は $P(24)=1-P(\overline{3\cap8})=1-P(\overline{3}\cup\overline{8})$ であるから、$P(\overline{3}\cup\overline{8})=P(\overline{3})+P(\overline{8})-P(\overline{3}\cap\overline{8})$ を求めればよい。

$$P(\overline{3})=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2)より $P(\overline{8})=\dfrac{2n^2+7n+9}{9\cdot2^n}$

$$P(\overline{3}\cap\overline{8})=\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_nC_1\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times2+{}_nC_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{n^2+7n+8}{8\cdot3^n}$$

よって $P(24)=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{2n^2+7n+9}{9\cdot2^n}+\dfrac{n^2+7n+8}{8\cdot3^n}$